Numeri complessi

Definizione

L'insieme dei numeri complessi è definito come l'insieme di tutte le coppie di numeri reali, ossia

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Su $\mathbb{C}$ sono definite due operazioni interne, un'operazione di somma e un'operazione di prodotto, che agiscono nel modo seguente

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \quad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$$

Da notare che $(0,0)$ è l'elemento neutro rispetto alla somma e che $(1,0)$ lo è rispetto al prodotto. Inoltre $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$. L'insieme $\mathbb{C}$, munito di queste due operazioni, è un campo.

Forma algebrica dei numeri complessi

Posto $1 =_{\text{def}} (1,0)$ e $i =_{\text{def}} (0,1)$, ogni numero complesso (a,b) si può esprimere in forma algebrica così come segue

$$(a,b) =_{\text{def}} a + ib$$

Il numero reale a si chiama *parte reale*, mentre il numero reale b si chiama *parte immaginaria*. Il numero complesso i viene detto *unità immaginaria*, e secondo la definizione risulta $i^2 = -1$. Le operazioni di somma e prodotto si estendono naturalmente ai numeri complessi espressi in forma algebrica

$$(a+ib) + (c+id) = a + ib + c + id = a + c + i(b+d)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad+bc)$$

Complesso coniugato

Dato un numero complesso $z = (a,b) = a + ib$, il suo complesso coniugato è $\bar{z} = (a,-b) = a - ib$.

Modulo e fase

Dato un numero complesso $z = a + ib$, si definisce *modulo* di z la quantità $M = \sqrt{a^2 + b^2}$, si definisce invece fase, o argomento, di z, la quantità

$$\theta = \begin{cases} \mathrm{arctg}(\frac{b}{a}) & \text{se } a > 0 \\ \mathrm{arctg}(\frac{b}{a}) - \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b < 0 \\ \mathrm{arctg}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0 \\ -\pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b = 0 \end{cases}$$

Rappresentazione in forma trigonometrica

Ogni numero complesso $z = a + ib$ può essere espresso in modulo e fase, così come segue

$$z = M(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Si noti che in questa rappresentazione il complesso coniugato si scrive come $\bar{z} = M(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$.

Formula di Eulero

Tramite gli sviluppi in serie di Taylor di seno, coseno e esponenziale si dimostra la seguente formula di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza seno e coseno possono essere espressi con esponenziali complessi nel modo seguente

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Rappresentazione in forma esponenziale

Ogni numero complesso $z = a + ib$, con modulo M e fase θ, può essere espresso in forma esponenziale nel modo seguente

$$z = Me^{i\theta}$$

Si noti che in questa forma il complesso coniugato si scrive come $\bar{z} = Me^{-i\theta}$.

Formule di De Moivre

Dati due numeri complessi, $z_1 = M_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ e $z_2 = M_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$, valgono le seguenti formule di De Moivre

$$z_1 \cdot z_2 = M_1 M_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{M_1}{M_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad \text{con} \quad z_2 \neq 0$$

In particolare, indicando con $|\cdot|$ il modulo di un numero complesso e con $\arg(\cdot)$ la fase, risulta

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Dato $z \in \mathbb{C}$, detto M il suo modulo e θ la sua fase, risulta

$$z^n = M^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Radici n-esime

Dato un numero complesso w, si dice che z è la radice n-esima di w se e solo se $z^n = w$. Se $w \neq 0$, allora esistono esattamente n radici n-esime di w. Dette $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tali radici, e posto $w = M(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, risulta

$$z_k = M_k\left(\cos(\theta_k) + i\sin(\theta_k)\right)$$

con

$$M_k = M^{\frac{1}{n}}$$
$$\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$.